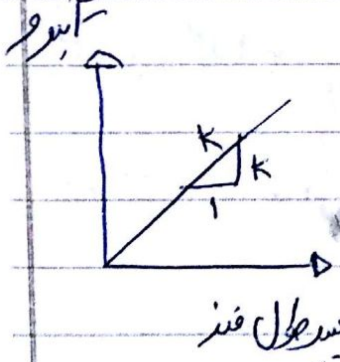
Subject: Year: Month: Date:

کتاب لوگان پایان ترم ۱۵ نمره LOGAN

تکالیف ۵ نمره + ۲ نمره SAP

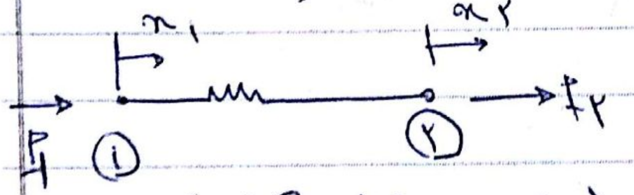
هر جلسه‌ش ۲۸ تا ۴۰ مطالعه

فنرها یک فنر خطی در نظر بگیرید. **المان**



K سختی فنر

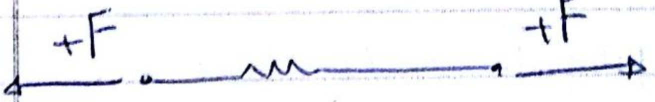
۲ درجه آزادی . ۲ گره node



قرارداد + فنرها در اجزا محدود

$$F = K\delta = K(x_2 - x_1)$$

حالا تحت کشش قرار میدیم.



قرارداد + فنرها در استاتیک

این دو را با هم مقایسه می کنیم.

$$f_1 = -F = -K(x_2 - x_1)$$

$$f_2 = +F = +K(x_2 - x_1)$$

حالا این ۲ معادله به صورت ماتریسی می نویسیم

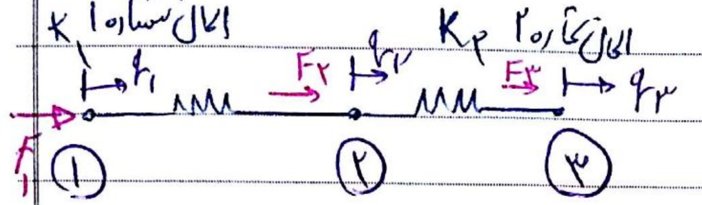
$$\begin{bmatrix} +K & -K \\ -K & +K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$[K_e]$ ماتریس سختی المانی

رابطه جابجایی با f هاست.

Fatima

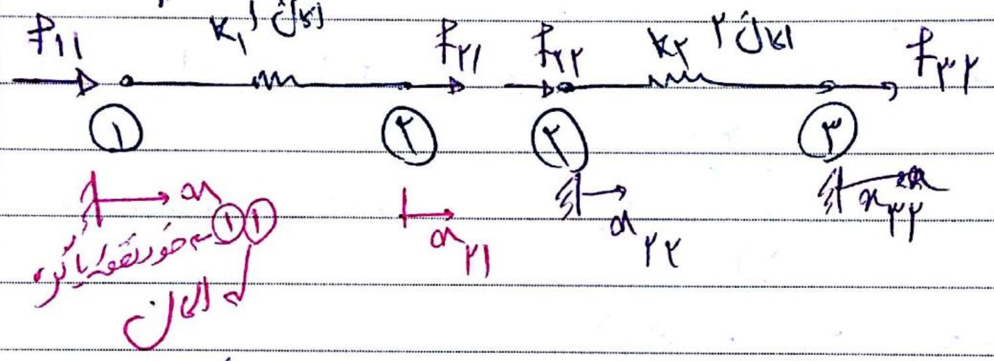
حالا اگر ۲ فنر داشته باشیم.



۳ درجه آزادی

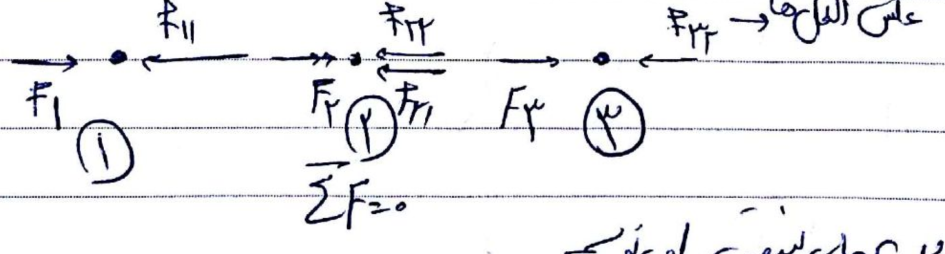
۳ گره ، ۲ المان داریم درجات آزادی با جهت + ما یکی است از چپ به راست

پس جهت + ما هم از چپ به راست . حالا فنرها را جدا می‌کنم .



f_{11} نیروی داخلی برای گره ۱ و المان ۱ — مفصل داریم نه خود مفصل است .

حالا مفصل‌ها را جدا می‌کنم . عکس العمل‌ها را هم داریم .



حالا ماتریس های سختی را می‌نویسیم .

فنر ۱

$$\begin{bmatrix} +k_1 & -k_1 \\ -k_1 & +k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix}$$

فنر ۲

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{22} \\ q_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

شرایط پیوستگی: $q_1 = a_{11}$ $\quad q_2 = a_{21} = a_{22}$ $\quad q_3 = a_{32}$

حالا معادلات را برحسب q های بنویسیم.

فنر اول

$$\begin{bmatrix} +k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & +k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

فنر دوم

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & +k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix}$$

حالا معادلات را جمع می‌زنیم
با دیاگرام آزاد المان

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11}+0 \\ f_{21}+f_{22} \\ 0+f_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

نیروها، نیروهای خارجی اعمال شده هستند

سختی‌ها هم ضرایب درجات آزادی q ها هستند

حالا فرض می کنیم ۳ متصل است

$$\begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{array}$$

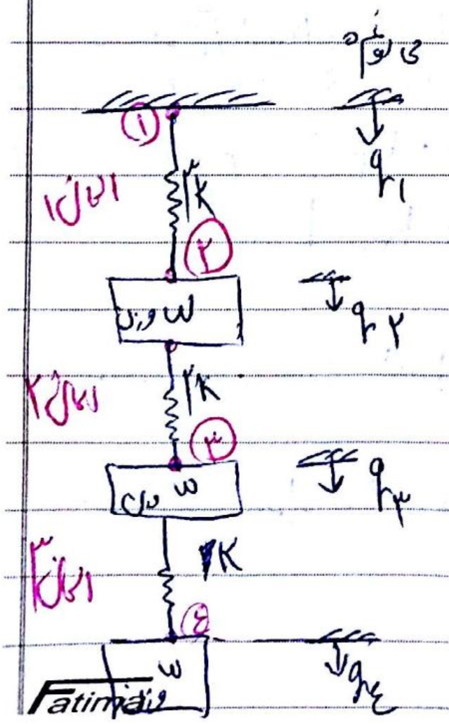
$$\begin{bmatrix} [\ ] & & & 0 \\ & [\ ] & & \\ & & [\ ] & \\ 0 & & & [\ ] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

درجه آزادی که صفر باشد ستون مربوط و ردیفش حذف می کنیم.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & +k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

برای وارون

مثال:



اول ۴ درجه بعد یه درجش صفر میشه ۳ در ۳

q ها درجه آزادی ماست که ۴×۴ داریم.

خب حالا المان المان می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{22} \\ f_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{33} \\ f_{43} \end{Bmatrix}$$

حالا معادلات عمومی

$$\begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 & 0 \\ -3k & 3k+2k & -2k & 0 \\ 0 & -2k & +2k+k & -k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21}+f_{22} \\ f_{32}+f_{33} \\ f_{43} \end{Bmatrix} \begin{matrix} = R_1 \\ = w \\ = w \\ = w \end{matrix}$$

حالا کلیه q ها را اعمال می‌کنیم که اولی صفر می‌شه ستون اول و ردیف اول

$q_1 = 0$ ⟵

نیروش هم می‌شه عکس العمل ما

Fatima

کدارهای محاسبات ماتریس ۶/۳

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: ....

حالا برای ساده‌تر شدن از K فاکتور می‌گیریم.

* ماتریس‌های سختی متقارن هستند *

$$K\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = w\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} f_{11}$$

حالا باید وارون کنیم ماتریس را که بتونیم جواب را به دست بیاوریم.

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}[A]$$ در ریاضیات از این روش می‌رویم

ما از روش حذف گاوس استفاده می‌کنیم.

در اینجا ما می‌گیریم w و K را در سمت راست می‌نویسیم $\frac{w}{K}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

تبدیل به بالا پایین مثلثی می‌کنیم — این جا بالا مثلثی می‌کنیم یعنی صفرهای از پایین را همیشه کم بگیریم با اعمال

① $\times \frac{5}{2}$ با ردیف اول جمع ← ردیف ۲

ردیف ۱ تحت عنوان محور در دستور کار: از ردیف پایین می‌بریم ۲ بالا

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -\frac{5}{2}\times 2 & \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Fatima

جای تمرین — $\times \frac{11}{2}$ با ردیف دوم جمع می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Subject: FAP ۱۹ Year: Month: Date:

مراحل حذف گاوس
در امتحان باید نوشت

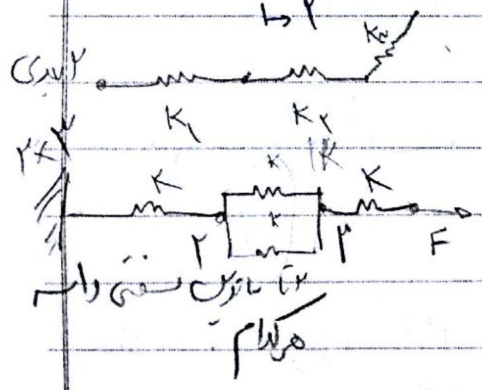
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & +\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2}+\frac{11}{2} & \frac{11}{2}-\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{7}{2} \end{Bmatrix}$$

$3q_4 = 9 \rightarrow q_4 = 3w/K$

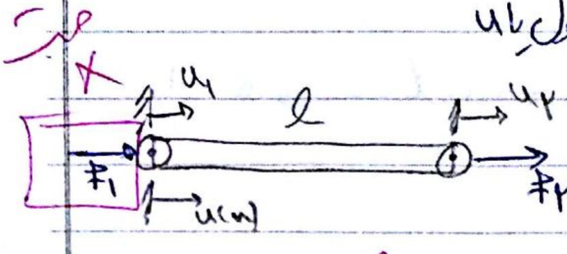
$\frac{11}{2} q_3 - \frac{5}{2} q_4 = \frac{7}{2}$

$\frac{11}{2} q_3 - \frac{5}{2}\times 3 - \frac{7}{2} \longrightarrow q_3 = 2w/K$

$5q_2 - 2q_3 = 1 \longrightarrow q_2 = 1w/K$



جلسه دوم:
عضو خرپا:
یک عضو دو نیرویی است، افزایش یا کاهش طول دارد،
دو درجه آزادی دارد.



قرارداد + در امتداد محور المان در جهت جابجایی باشد.

Fatima

٧

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

جابه‌جایی هر نقطه را می‌نویسیم.

$u(x) = u_1 P_1(x) + u_2 P_2(x)$

u_1 و u_2 درجات آزادی اند در گره شماره ۱ و ۲

P_1 و P_2 مشخص نیستند. پس با جابه‌جایی گره‌ها می‌شه جابه‌جایی هر نقطه را مشخص کرد. در $u(x)$ شرایط مرزی را باید اعمال کنیم و آن‌ها را اعمال کنیم.

شرایط مرزی: $u_1 = u(x=0) = u_1 P_1(0) + u_2 P_2(0)$

$P_1(0) = 1$

$P_2(0) = 0$

سمت راست و چپ را مقایسه می‌کنیم پس:

حالا برای u_2: $u_2 = u(x=L) = u_1 P_1(L) + u_2 P_2(L)$

باز هم با مقایسه طرف سمت راست و چپ داریم.

$P_2(l) = 1$

$P_1(l) = 0$

حالا شرایط مرزی را داریم.

$$\begin{cases} P_1(0) = 1 \\ P_1(l) = 0 \\ P_1(x) = a_0 + a_1 x \end{cases}$$

$\Rightarrow P_1(0) = a_0 + a_1 \times 0 = 1 \rightarrow a_0 = 1$

$P_1(l) = a_0 + a_1 \times l = 0 \rightarrow a_1 = -1/L$

منحنی‌های ما

$\Rightarrow P_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$

$P(x)$ ها را خطی در نظر گرفتیم. ساده‌ترین المان ممکن است.

Fatima

Subject: Year: Month: Date:

حالا می‌ریم سراغ P_2:

$$P_2(x) = b_0 + b_1 x$$

$$P_2(0) = 0 \to b_0 + b_1 \times 0 = 0 \to b_0 = 0$$

$$P_2(l) = 1 \to b_0 + b_1 L = 1 \to b_1 = 1/l$$

$$\to P_2(x) = +x/L$$

حالا می‌ذاریم توی معادله کلی $u(x)$

$$u(x) = u_1\left(1 - x/l\right) + u_2\, x/l$$

حالا باید نیروها رو به دست آورد. از مقاومت مصالح داریم: $\Delta = \frac{Pl}{EA}$

(نیروی کشش) قرارداد مقاومت مصالح

$$\text{سختی} = K = \frac{P}{\Delta} = \frac{\Delta AE}{\Delta l}$$

$$\text{کرنش}\ \epsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}u(x) = \frac{d}{dx}\left[u_1\left(1-\frac{x}{L}\right) + u_2 x/l\right]$$

به مشتق اول $u(x)$ ها

$$= \frac{-u_1}{l} + \frac{u_2}{l} = \frac{u_2 - u_1}{l}$$

حالا P ها از مقاومت مصالح

$$P = \sigma_x A = E\epsilon_x A = EA\,\frac{u_2 - u_1}{L}$$

رابطه‌ها رو به دست بیارم سختی به دست می‌آید.

$$f_1 = -P = \frac{-EA}{l}(u_2 - u_1)$$

$$f_2 = P = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1)$$

۲ معادله ۲ مجهول می‌خواهیم به صورت ماتریسی بنویسیم.

Fatima

Scanned by CamScanner

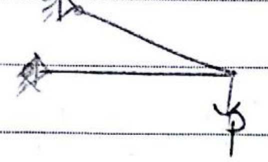
Subject: .... Year: .... Month: .... Date: ....

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

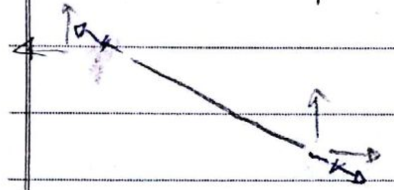
معادله‌ای که برای خرپاهاست.
مد آن ها.
ماتریس ها را باید شبه تری
یک مرتبه نزول بیاریم.

ماتریس سختی برای عضو خرپا (۲ نیروی)
stiffness Matrix Truss

خرپاها ۲ نیروی هستند وزن را در نظر نمی‌گیریم. با اجزا محدود حل می‌کنیم



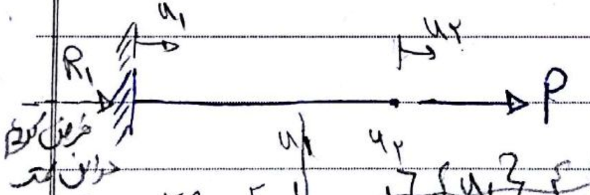
به الحال خرپا و است ... یکی واسه \



نیروها را در راستای عضو می‌گیریم
سازه را شبیه استفاده می‌کنیم

$\sum \vec{F}_x = 0$
$\sum \vec{F}_y = 0$
$\sum M = 0$

مثال:



اول اولین کار ماتریس را می‌نویسیم.

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} R_1 \\ P \end{Bmatrix}$$

خب درجه آزادی u_1 صفر است
پس ستون و ردیفش صفر باشد.

$$\frac{EA}{L}u_2 = P$$

$$u_2=\frac{PL}{EA}$$

خب جواب با حل مقاومت یکی شد پس خطا ۰ است

دقت ۱۰۰ درصد

هرجا نقطه انرژی هست و نیرو داره یه المان اضافه می‌کنیم. به تعداد نیروها حداقل چون تعداد کردن

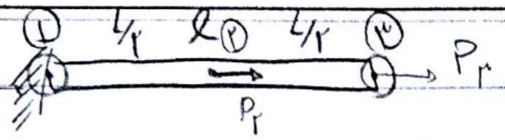
هرجا ناپیوستگی هست یا اینکه گره باشه مثل این

$$\frac{EA}{L}(u_1-u_2)=R_1 \rightarrow \frac{EA}{L}\left(0-\frac{PL}{EA}\right)=R_1 \rightarrow R_1=-P$$ حالا برای محاسبه R وقتی u_2 را بدست آوردیم برمی‌گردیم تو معادله اول

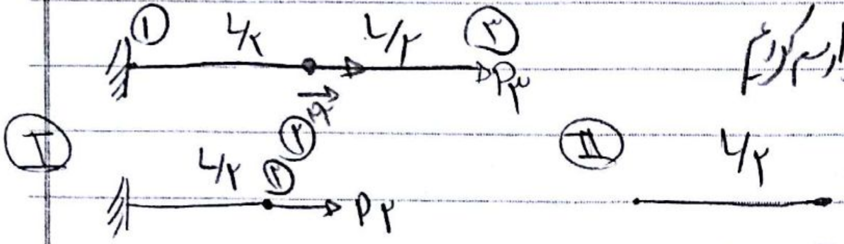
Fatima

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:



اسمبل سازی کنیم



در این جا فنرها را مجزا رسم کردیم
به ۲ المان

المان اول

$$\frac{EA}{L/2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L/2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_c\end{Bmatrix}$$

۳×۳ در نظر می‌گیریم و اضافه می‌کنیم

$$\frac{EA}{L/2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_c\end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L/2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_c\end{Bmatrix}$$

حالا این دو را با هم جمع می‌زنیم.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1+1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_c\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_1\\ P_2\\ P_3\end{Bmatrix}$$

درجه آزادی u_1 برابر ۰ شود

$$\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_2\\ P_3\end{Bmatrix}$$

برای حل از حذف گاوس و با مثلثی استفاده می‌کنیم.

$$\left[\begin{matrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}P_2\\ P_3\end{matrix}\right]\frac{L}{2EA}$$

ردیف ۲ ×۲ + ردیف ۱

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & +1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_2\\ 2P_3+P_2\end{Bmatrix}\frac{L}{2EA}$$

Fatima

اگر P_3 ... باشه مسأله همان قبلی است

$$u_3 = \left(\frac{P_2 + 2P_3}{2EA}\right) l$$

$$2u_2 - u_3 = \frac{P_2 l}{2EA}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_2 l}{2EA} + u_3\right) = \frac{1}{2}\frac{P_2 L}{2EA} + \left(\frac{P_2 + 2P_3}{4EA}\right) l$$

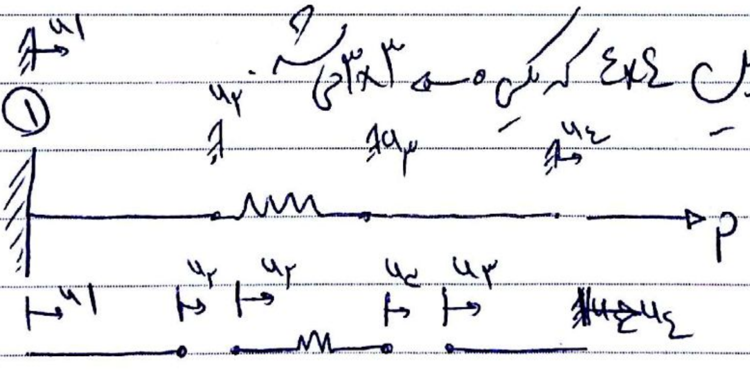
اگر ناپیوسته باشه A ها متفاوت خواهد بود ولی همچنان ممکن است فرق کند.

۱۲ المان است.

حالا المان ۳ هم داریم اما یک فنر

این سیستم فقط در راستای محوری حرکت می کند.

۴ درجه آزادی سه ماتریس 4×4 که یکی مثل 3×3 می شه.



فقط بار خارجی را اعمال می کنیم.

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad K\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad K\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

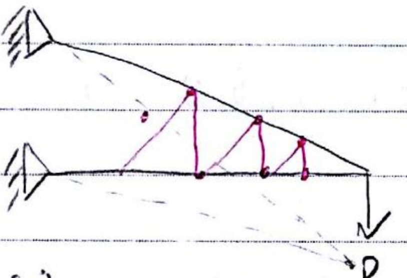
Subject: ادامه آنالیز ماتریسی   Month: جابجایی‌ها

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{l}+K & -K & 0 \\ 0 & -K & +K+\frac{EA}{L} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_1\\0\\0\\P\end{Bmatrix}$$

حالا حل می‌کنیم

این ماتریس ۳x۳ ماتریس سختی است که با بالا یا پایین مثلثی می‌کنیم که از بالا یا پایین

شروع به صفر کردن می‌کنیم.

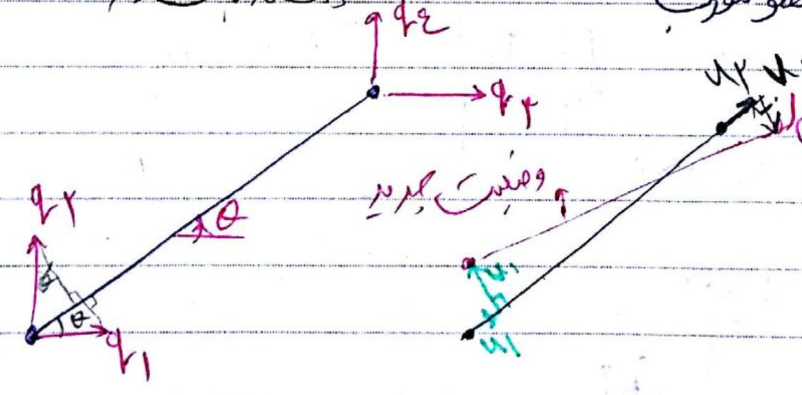


عضوهای صفرنیرو را اضافه می‌کنیم.

$\Sigma F = 0$

فرض کنیم که جابجایی افقی و عمودی داشته باشد

اولین می‌ریم سراغ عضو مورب



q ها مختصات کلی

و مختصات جدید

هر دو جرخه هم حرکت می‌کنه

حالا می‌آییم جابجایی را با جابجایی در امتداد خود عضو و یکی عمود بر خود عضو در نظر می‌گیریم

$u_1 = q_1\cos\theta + q_2\sin\theta \qquad u_2 = q_3\cos\theta + q_4\sin\theta$

$v_1 = -q_1\sin\theta + q_2\cos\theta \qquad v_2 = -q_3\sin\theta + q_4\cos\theta$

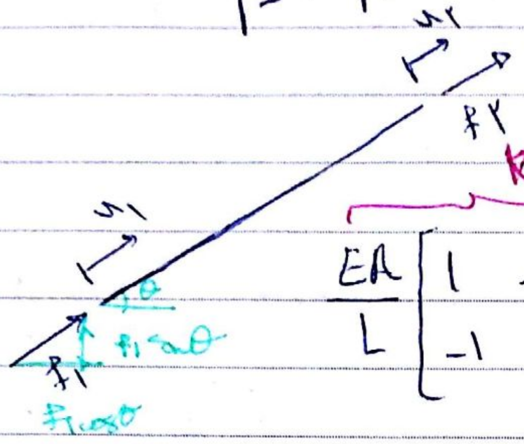
معادلات تبدیل مختصات u به q

از معادلات بالا برای محاسبه U

Fatima

معادله ماتریس سختی را برحسب q ها می‌خواهیم بنویسیم.

اول u ها رو برحسب q ها می‌نویسیم.



K_e

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

خب u_1 و u_2 را برحسب ماتریس تبدیل و q ها می‌نویسیم.

$u_1 = q_1 \cos\theta + q_2 \sin\theta$

$u_2 = q_3 \cos\theta + q_4 \sin\theta$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$[R]$ ماتریس تبدیل

$$[K_e]\{u\} = \{f\}$$

$[R]$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

ما می‌خواهیم سمت راست و چپ q بگیر

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: ....

حالا میریم سراغ ترانهاده. $[R]^T$

$$\frac{EA}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}}_{[R]^T}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & +\sin\theta \end{bmatrix}\{q\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}}_{[R]^T}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \hline -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{array}\right]\{q\} = \{F\}$$

(درجات آزادی)

ربع ۱ و ۴ یکی است و ۲ و ۳ هم با هم یکی است و ماتریس سختی ها متقارن اند

رابطه بالا ماتریس سختی ۲ بعدی خرپا است اگر $\theta = 0$ باشد همان حالت افقی بدست می آید.

برای فنر هستی متقارن است K

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix} = \begin{matrix} q_1 \\ \not{q_2} \\ q_3 \\ \not{q_4} \end{matrix}$$

خودبخود q_2 و q_4 صفر است.

حالا سمت راست رو هم باید حساب کنیم. برای مربع کردن از T استفاده کردیم ترانهاده

$$\begin{Bmatrix} F_1\cos\theta \\ F_1\sin\theta \\ F_2\cos\theta \\ F_2\sin\theta \end{Bmatrix}$$

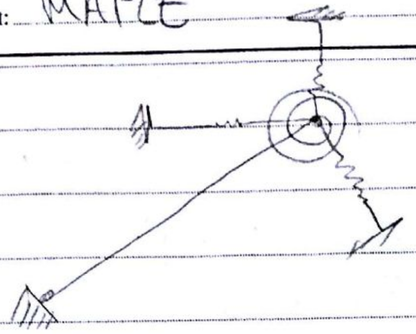
در ۲ طرف ضرب کردیم

این از طرف راست:

Fatima

نرم افزارهای مهندسی.

Subject: MAPLE   Year: Month: Date:



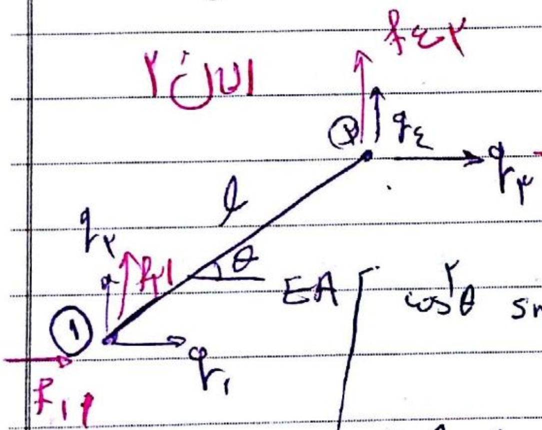
۲x۲ اضافه شده.

اگر فنر حلزونی اضافه کنیم چون ۲تا اضافه کردیم

شکل خراب است

A First course in the Finite Element Method
Daryl L. Logan
university of Wisconsin   THOMSON

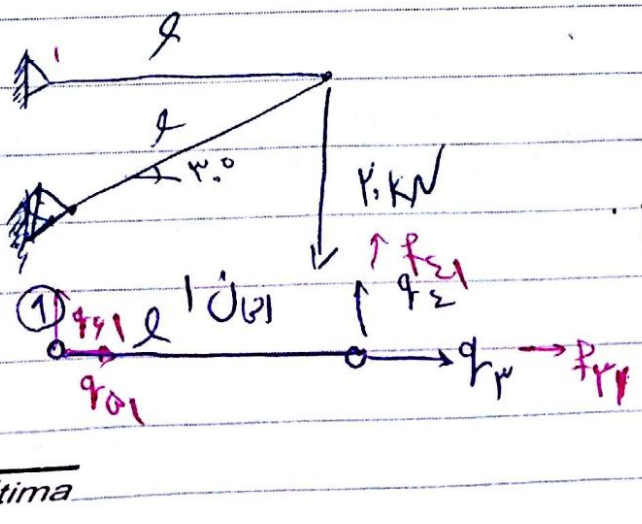
جلسه سوم:



مثال: سر اتصال یک میله فرمول می‌شود

داشته باشی

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$



یک جرثقیل می‌خواهیم حل کنیم.

نمودار جسم آزاد را رسم می‌کنیم.

(اندیس اول شماره درجه آزادی و دوم شماره المان)

درج کنید

Scanned by CamScanner

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: ....

از جمع اول دو ماتریس داریم:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{7}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_{31}+F_{32}\\ F_{41}+F_{42}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -20\end{Bmatrix}$$

حالا بنابراین نیروهای خارجی اعمالی به مفصل را می‌دهد پس نیاز نیست که جدا کنیم بعد جمع بزنیم

و ارون ماتریس معکوس میشه: K^{-1}

$$\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\frac{L}{EA}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 7\end{bmatrix}}_{K^{-1}}\begin{Bmatrix}0\\ -20\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{L}{EA}\begin{bmatrix}20\sqrt{3}\\ -140\end{bmatrix}$$

$20\sqrt{3}$ ← به سمت راست

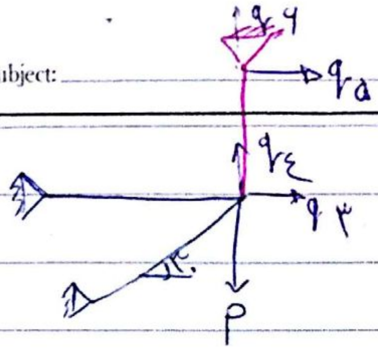
-140 ← به سمت پایین می‌آید

حالا برای محاسبه المان ها برمی‌گردیم به (I) و (II). و اون هایی که باید حذف بشه را حذف می‌کنیم مثلاً ردیف ستون اول هر دو را صفر می‌کنیم. و معادله اش را می‌نویسیم و حل می‌شود.

Fatima

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:



مثال بعدی.

الان اول عضو اضافه را بالا حساب کنیم.

اگر عضو سوم را جوش بدیم سختی آن نسبت به عضو خمشی است.

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

$\cos^2\theta$ $\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta\cos\theta$ $\sin^2\theta$

if $\theta = 90$

+θ

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{matrix}$$

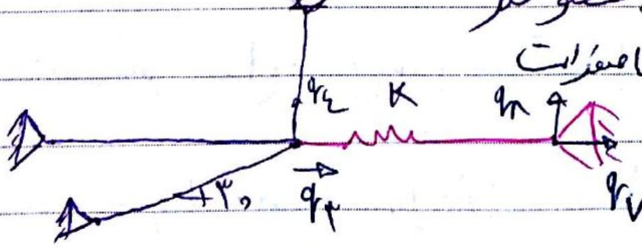
$q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6$

جمع با قبلی

$$\longrightarrow \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

حالا یه عضو دیگه اضافه میکنیم. عضو فنر

در راستای محوری داریم اما صفر است



ماتریس فنر

$$K\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای اسمبل ۴ در ۴ لازم داریم.

$$K\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_7 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix}$$

$q_3 \quad q_4 \quad q_7 \quad q_8$

برای اسمبل ۴ در ۴ آماده کردیم

برای عکس العمل ها میشه استفاده کرد.

Fatima

Scanned by CamScanner

Subject: ماتریس سختی المان ۱ — ماتریس سختی المان ۲

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (q_5, q_6, q_3, q_4)$$

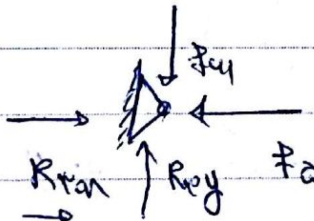
$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

ارتباط و شمول هستند برای q_5 و q_6

درجات آزادی که صفر است و تکیه‌گاه است حذف می‌شوند.

می‌تونیم قیدها رو الان اعمال کنیم بعد جمع بزنیم

بعد اینا رو جمع می‌زنیم.



$\sum F_x = 0$

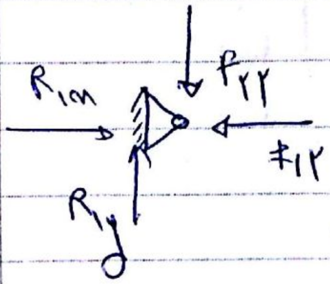
$R_{3x} = F_{51}$

$R_{3y} = F_{41}$

پس حاصل جمع می‌شوند

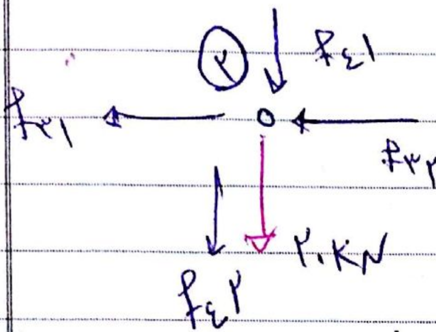
$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}+1 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} =$$

اینم از تکیه‌گاه‌ها.



$R_{1x} = F_{12}$

$R_{1y} = F_{22}$



$$\begin{cases} f_{31} + f_{32} = 0 \\ 20kN + f_{41} + f_{42} = 0 \end{cases}$$

بعد ماتریس سختی المان ها را می نویسیم اما الان q_5 و q_6 را اول می نویسیم.

ماتریس سختی × q ها = نیروها خارجی

برای المان ۱

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{51} \\ f_{61} \\ f_{31} \\ f_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{5x} \\ R_{6y} \\ f_{31} \\ f_{41} \end{Bmatrix} \quad (I)$$

از ردیف و ستونی که حذف می کنم می شه عکس العمل ها رو بدست بیارم.

برای المان دوم

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{Bmatrix} \quad (I)$$

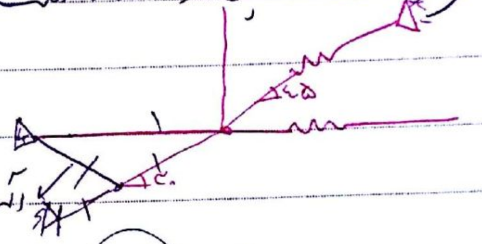
شرایط مرزی اعمال شده

اضافه شدن فنر باعث اضافه شدن این یک جمله به اولی می‌شود: $\frac{Kl}{EA}$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{KL}{EA} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

فنر در حالت ۲ بعدی که $\theta=45$ است می‌ذاریم در فرمول

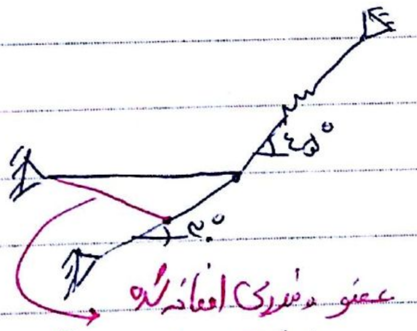
$$K\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$



اگر این اضافه شد باید المان حل بشه هر کدام یک المان.

دو تا دونه می‌شه اضافه کرد و حل کرد.

مثلاً این مثال را حل کنید.



عضو ضربدری اضافه شده

باید تبدیل حل کنی یک المان بگیری.

جلسه چهارم: جزئیات. ریزه‌کاری‌های دانشگاه‌مون. SAP2000

عضو عرضی به تسمه در سه سطح مقطع آن دو تا نشان می‌شود.

File → New model → ۲D از قبل حل شده → یا مختصات Grid → فاصله‌ها و تعداد → ارتفاع، دهنه → OK

اول تغییر واحد: پایین سمت راست تبدیل واحد N.m.s

Fatima

۲ تا عضو سیم. ۲ بعدی هست.

حالا متریال را با Define ← Material

→ steel

A99....

ok ←

(form sect / section)

نوع اتصال Define ← section ← قطع اهست ← Frame section

سطح مقطع استاندارد به دست می‌آوریم که نزدیک مرحله‌ی ما باشد.

وزن مصرفی

Fsection1 ← ok

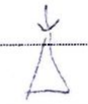
برای وارد کردن سطح مقطع‌های دیگر import می‌کنیم

نکته: ok ها رو شیر عوض کردن pin دو وال در ۳ جهت

بعد از انتخاب مفصل ← Assign ← joint ← Restrain قیدها رو مشخص می‌کنیم

مختصات

اعمال بار: اعمال بار ← Assign ← joint load ← force ← ok



Assign ← show load ← joint نشان دادن اعمال بارها

Display ← ... ← ok

عامل‌ها رو صیات بالا نشان داده ... xy

برای کالا اعضا View ← set Display option ← ok ← شماره‌ها را ... labels

Frame | عضوها

section چه عضوی چه سطح مقطعی

چه عضوی چه بیشتر بار

مشخص رنگ فولاد نشان رنگ را روشن

همه اینها قسمت

پس الان سطح مقطع و بار و اینا ok است

Fatima

Subject: شکل و نیروها و نمودارها ok

آنالیز استاتیکی هم ارتعاشاتی | ارتعاشاتی

Analyze → run → modal → ok

حالا اسم فایل می‌خواد → حالا شروع می‌کنه به آنالیز کردن → کنسول کنه.

وقتی قفل باز شه تغییرات می‌تونی انجام بدی. اگر باز شد ok وقتی روش کلیک کنی

قفل باز می‌شه. خب تموم شد تغییر شکل نشون بده

تغییر شکل‌ها

ضریب مقیاس‌ها رو هم می‌شه تغییر داد. روی اتو هم

روی شون بله با اسم تغییر شکل Max

می‌تونه باشه روی نرم افزار paint می‌ریم.

روی نقطه جلو که نقطه آخر

می‌خوایم ببینیم خرپا هست یا نه؟ ۲ نیروی هست روی نیرو

عکس العمل‌های نیروی را میده. joint

که مثلاً در مثال با نقطه نیت با ۲۰۰۰ هزار نیوتن

→ frame → ok

قدر مطلق‌ها نیروی‌های محوری (فشاری و کششی). مقادیرم می‌شه نشون بده.

نوع نیرو برش و ... نباید داشته باشه خرپا.

moment 33 → تنش خمشی → X خرپا.

متریال با وزن رلیست و بار گسترده‌است. از وزن صرف نظر کنم.

حالا قفل را باز کنم برای تغییرات. Define → material → فولاد → modify

weight = ۰

Fatima

نمودارها و اسم ببینیم تنش خمشی و نیروی برشی نباید باشه فقط محوری باید باشه

Subject: Year: Month: Date:

هنوز نیروی برشی هست. ← مثال خراب است. در صفحه ۳ و ۴ گفته نیرو برشی دارد هنوز عمل

پس این نقطه مفصل نیست جوش است.

پس باید برگردیم و اصلاح کنیم و مفصل کنیم. جوش را باید بشکنیم

باید خود عضو را تغییر داد. ← قفل را باز کنیم.

View → set Display option Releases. مفاصل را نشان بده

۳ عضو متفاوت که جوش شدن عضو را انتخاب کرده
در حالت آزاد آزاد را ← Release ← راست کلیک Non...
مشخص کرده. چپ پس انتقال ها نداشته باشد اما دوران ها را
آزاد کنیم.

torsion برای یکی و
چک کنم
بقیه آزاد

تکرار می‌کنیم برای بقیه عضو ها

الان همه معین اول ۲ درجه نامعین حل کنم. الان دیگه این خراب است.

حالا الان تغییر می‌خواهیم کنیم یکی از عضو ها انتخاب
Edit → Edit line تغییر کنیم. منطبق
به صفحه المان و نقطه‌ها
الان شده ۲ المان.

Fatima

۲۴

۱۷ جوزا

Subject: ___ Year: ___ Month: ___ Date: ___

٥/٥٥٥٩

باید عوض حول محور باشه — ناپایدار می‌شه.

حالا دوباره آنالیز می‌کنیم بهم تفاوت داره یانه مقداره است پس خطا می‌سابات است.

مقدارها رو چک می‌کنیم شاید نمودارش غلطه پس OK است اشتباه می

حالا یکی از المان ها رو به قطعات بیشتر تقسیم می‌کنیم

به دو قسمت و سوالی — کلاً اینا ۲ قسمت

حالا خرپا را اصلاح می‌کنیم. عضو اضافه می‌کنیم

و اشتباها آزاد مثل قبلی‌ها تیپ ها رو بهم می‌دیم ۵ تا حالا خودم رسم می‌کنیم — Draw — صفر نیرو اند

هرکدام را دوباره Rahm می‌کنیم. تا خرپا ... حالا آنالیز

File → creat report

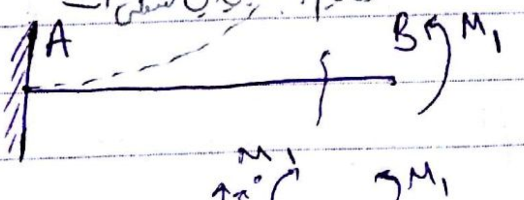
نمودار تنش ها هم است. print بگیریم برای هر صفحه المان اجرا کنیم.

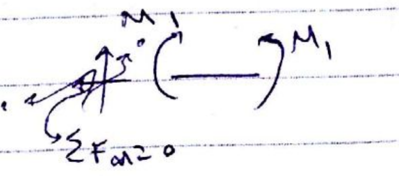
صفحه ۵۰ – ۶۰

این مثال رو حل کنیم ۲ دهنه

جلسه پنجم: یک تیر اسکلدار داریم. تیر را از یک قسمت برش می‌دهیم و نیروهای مختلف را مشخص می‌کنیم

فرض کنیم جابجایی این شکلی است

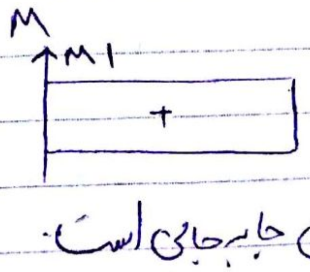




$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M = 0$



هدف پیدا کردن جابجایی است.

Fatima

Subject: Year: Month: Date:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M_1}{EI}$$

شرایط مرزی: $v_A = v(x=0) = 0$

$\theta_A = \frac{dv}{dx}\Big|_A = 0$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_1$$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_1x + C_1$$

B.C $EI(0) = M_1(0) + C_1 \longrightarrow C_1 = 0$

$$EI\,v(x) = \frac{M_1x^2}{2} + C_2$$

یک بار دیگر انتگرال می گیریم

B.C $v_A = v(x=0) = 0$

$$EI(0) = \frac{M_1(0)^2}{2} + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

پس با استفاده از مقاومت مصالح جواب (جابه جایی در قسمت انتهای تیر)

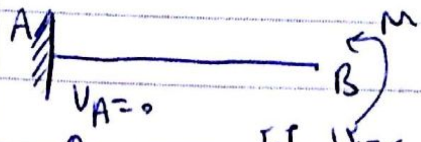
$$v(x) = \frac{M_1x^2}{2EI}$$

حالا با اجزا محدود می خواهیم حل کنیم.

از یک چند جمله ای استفاده می کنیم (مرتبه ۳)

این معادله باید بتواند شرایط مرزی را ارضا کرده باشد.

$$v(x) \simeq a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



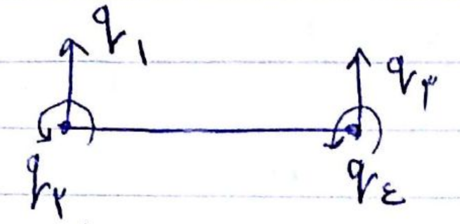
$v_A = 0$

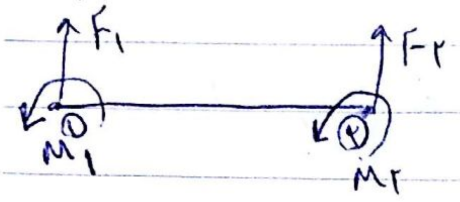
$\theta_A = 0$

$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$

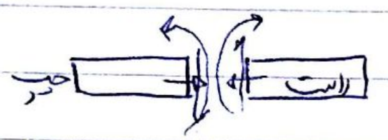
الان راه حل دیفرانسیلی می گیریم

Fatima

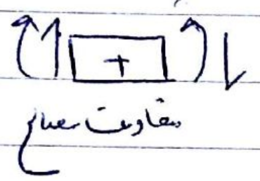




قرارداد + اجزا محدود



قرارداد + مقاومت مصالح



۴ درجه آزادی داریم

$V_A = q_1 \ , \ \theta_A = q_2 \ , \ V_B = q_3 \ , \ \theta_B = q_4$

داشتیم:

$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^4$ (I)

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$V_A = v(x=0) = q_1 = a_0 + a_1(0) + a_2(0^2) + a_3(0)^3 \rightarrow a_0 = q_1$

$\theta_A = \theta(x=0) = q_2 = a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 \rightarrow q_2 = a_1$ (II)

پس تا الان

$\rightarrow = q_1 + q_2 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

شرایط مرزی دیگر را اعمال می‌کنیم

$V_B = v(x=l) = q_3 = q_1 + q_2 l + a_2 l^2 + a_3 l^3$

$\rightarrow a_2 l^2 + a_3 l^3 = -q_1 - q_2 l + q_3$ (B)

$\theta_B = \theta(x=L) = q_4 = q_2 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \rightarrow \underbrace{2a_2 L + 3a_3 L^2 = -q_2 + q_4}_{A}$

(II) $\longrightarrow q_2 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول داریم A و B. B را در ۳ و A را در $(-l)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3a_2 L^2 + 3a_3 l^3 = -3q_1 - 3q_2 L + 3q_3 \\ -2a_2 l^2 - 3a_3 l^3 = +q_2 l - q_4 l \end{cases}$$

$\longrightarrow a_2 l^2 = -3q_1 - 2q_2 l + 3q_3 - q_4 l$

a_2 را در یکی از ۲ معادله می‌گذاریم $\longrightarrow a_3$ ✓

$\longrightarrow 3l^3 a_3 = 6q_1 + 3q_2 l - 6q_3 + 3q_4 l$

a ها را برحسب درجات آزادی المان تیر به دست آوردیم. حالا جایگذاری می‌کنیم در معادله اولیه که ببینیم ضریب‌ها به چه صورت می‌شوند.

در I: $= q_1 + q_2 x + a_2 x^2 \frac{l^2}{l^2} + a_3 x^3 \frac{3l^3}{3l^3}$

$\simeq q_1 + q_2 x + \frac{x^2}{L^2}\left(-3q_1 - 2q_2 L + 3q_3 - q_4 l\right) + \frac{x^3}{3l^3}\left(6q_1 + 3q_2 l - 6q_3 + 3q_4 l\right)$

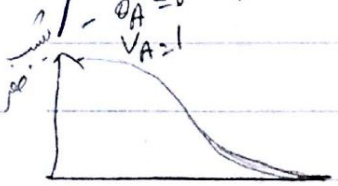
$\simeq \underbrace{q_1\left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)}_{P_1(x)} + q_2\underbrace{\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{P_2(x)} + q_3\underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{P_3(x)} + q_4\underbrace{\left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{P_4(x)}$ III

IRAN EMROOZ

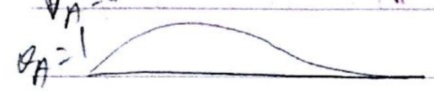
Scanned by CamScanner

حدس برای جابه‌جایی در نقاط آن بزنیم ــــــ که حالا رابطه بین فانکشن‌ها و ... به دست آوریم.

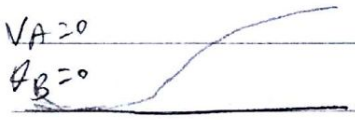
حالا نمودارهای هر کدام را رسم می‌کنیم. $P_1(x)$ تیر یک سر گیردار



تیر یک سر گیردار را به اندازه واحد دوران دهیم.



$P_2(x)$



$P_3(x)$

از این جابه‌جایی‌ها و نیروها که ماتریس سختی را به دست بیاوریم باید از معادله دیفرانسیل استفاده کنیم.

معادله دیفرانسیل $EI\frac{d^2v}{dx^2}=M(x) \longrightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3}=V(x)$

← نیروی برشی.

$$III = V(x) \longrightarrow \theta=\frac{dv}{dx}=q_1\left(0-\frac{6x}{L^2}+\frac{6x^2}{L^3}\right)+q_2\left(1-\frac{4x}{L}+\frac{3x^2}{L^2}\right)$$

$$+q_3\left(\frac{6x}{L^2}-\frac{6x^2}{L^3}\right)+q_4\left(-\frac{2x}{L}+\frac{3x^2}{L^2}\right)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=EI\left\{q_1\left(-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\right)+q_2\left(-\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\right)+q_3\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\right.$$

$$\left.+q_4\left(-\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right)\right\}$$

Scanned by CamScanner

۱۴۷ جلسه ۴F

Year........ Month........ Day........ Subject:........

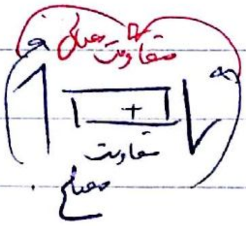
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = EI\left\{q_1\frac{12}{l^3} + q_2\frac{6}{L^2} + q_3\left(\frac{-12}{l^3}\right) + q_4\frac{6}{L^2}\right\} = F_1 = -F_2$$

نیروی برشی

$V(x)$ سمت راست تابع x است . این نیروی برشی برای سازه‌ای خوب که نیروی برشی ثابت است.

باید برش کرد.

پس این المان صورت‌هایی خواهد داشت .



تعیین علامت باید کرد .   قرارداد + را برای نیروی برشی .

گشتاور خمشی: $M(x=0) = M_1 = EI\left\{q_1\left(-\frac{6}{l^2}\right) + q_2\left(-\frac{4}{l}\right) + q_3\left(\frac{-12}{l^3}\right) + q_4\left(\frac{-2}{l}\right)\right\} = -M_1$ تعیین علامت .

$$M(x=L) = M_2 = EI\left(\frac{q_1}{L^2}(-6+12) + \frac{q_2}{L}(-4+6) + \frac{q_3}{L^2}(6-12) + \frac{q_4}{L}(-2+6)\right)$$

نیرو، عکس العمل — جابجایی‌ها q_1, q_2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & +6L & -12 & 6L \\ +6L & +4l^2 & -6L & +2L^2 \\ -12 & -6L & +12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$q_1 \to 0$، $F_2 = 0$، $q_2 = 0$

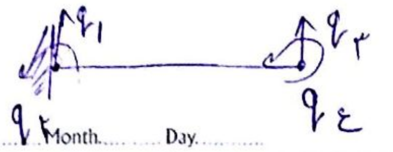
ماتریس سختی که متقارن است .

این برای یک المان است :

نتیجه می‌گیریم است که ۲×۲ است این جا

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner



Year. Month. Day. Subject:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & -6L\\ -6L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ M_2\end{Bmatrix}$$

سه تا بالایی حذف می‌کنیم

معمولاً از حذف گاوس استفاده می‌کنند. ← باید صفر کنیم

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & -6L\\ 0 & 2L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_3\\ q_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 2M_2/L\end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix}12 & -6L & 0\\ -12 & 8L & 2M_2/L\\ \hline 0 & 2L & 2M_2/L\end{matrix}$$

$$\Rightarrow q_4=\frac{2M_2}{2L^2}\,\frac{L^3}{EI}=\frac{M_2L}{EI}$$

معادله اول: $\frac{EI}{L^3}\left(12q_3-\left(6L\frac{M_2L}{EI}\right)\right)=0$ داخل پرانتز باید صفر باشد.

$\rightarrow 12q_3=\frac{6M_2L^2}{EI}\rightarrow q_3=\frac{M_2L^2}{2EI}$ جابه‌جایی در نقطه $x=L$ است q_3

از مقاومت مصالح داشتیم: $v(x)=\frac{M_1x^2}{2EI}$

در اجزاء محدود معمولاً تا این جا محاسبه می‌شود. $(x=L)\rightarrow \frac{M_1L^2}{2EI}$

پس در این جا با دقت ۱۰۰ درصد به دست آوردیم.

داشتیم: $v(x)=q_1\varphi_1(x)+q_2\varphi_2(x)+q_3\varphi_3(x)+q_4\varphi_4(x)$

$$\frac{M_2L^2}{2EI}\left(-\frac{2x^3}{L^3}+\frac{3x^2}{L^2}\right)+\frac{M_2L}{EI}\left(\frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}\right)$$

$$\frac{M_2L}{EI}\left(-\frac{2x^3}{L^3}\frac{L}{2}+\frac{3x^2}{L^2}\frac{L}{2}+\frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}\right)=\frac{M_2L}{2EI}\,\frac{x^2}{L}=v(x)$$

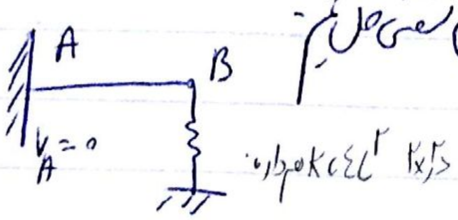
IRAN ...ROOZ

جابه‌جایی در طول خود المان. معمولاً این کار را نمی‌کنیم.

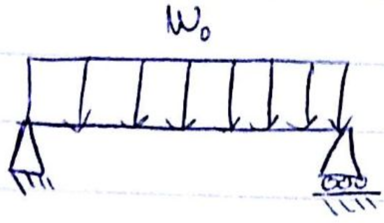
Scanned by CamScanner

حالا می خواهیم نشون بدیم با دقت خاص برای این مسأله شد ۱۰۰ درصد. با یک تغییر کوچک

این را نشان می دهیم. (کلاً باید بتوانیم با ماتریس سختی حل کنیم



حالا مسأله ای که می خواهم حل کنم. با استفاده از مقاومت مصالح:



$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -w_0$$

$$V(x) = EI\frac{d^3v}{dx^3} = -w_0x + c_1$$

$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_0x^2}{2} + c_1x + c_2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{-w_0x^3}{6} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$$

از درجه ۴ است جابجایی

$$EIv(x) = -\frac{w_0x^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4$$

با المان نمی شه حل کرد. چون با چند جمله ای مرتبه ۳ نمی شه حل کرد

میایم مسأله رو به المان کوچک تر تبدیل می کنیم.

و هر کدام از المان ها مرتبه ۳ تخمین می زنیم و پیوستگی را حفظ می کنیم.

پیوستگی شیب باید باشد

$\theta_{راست} = \theta_{چپ}$

$V_{راست} = V_{چپ}$

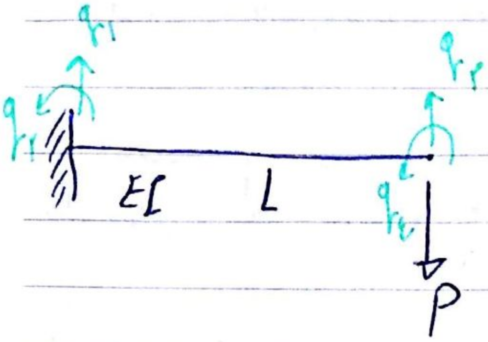
کاربردش اینجا می رسد. ماتریس سختی را می خواهد مثلاً را قالب سازی

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

Year.......... Month.......... Day.......... ماتریس سختی فریم و بحث ویژه (کار برش هم است) Subject:..........

جلسه ۹۷,۲,۳



مثال: یک تیر یکسر گیردار را در نظر بگیرید.

درجات آزادی مشخص شده q ها هستند

اول با ۱ المان حل می کنیم

فرمول مهم

$$K_{beam} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی المان تیر

ماتریس sym هست

اول درجات آزادی = ۰ اعمال می شوند

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

R_1 و R_2 کمکی به حل q_3 و q_4 نمی کنند

پس داریم:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

راه اول حل ۲ معادله ۲ مجهول
راه دوم: حذف گاوس

دو سمت چپ را در $\frac{L^3}{EI}$ ضرب می کنم.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -PL^3/EI \\ 0 \end{bmatrix}$$

باید ماتریس را بالا مثلثی کنیم

سطر دوم را در $\frac{2}{L}$ ضرب می کنم

$$\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ & \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -PL^3/EI \\ 0 \end{bmatrix}$$

IRAN EMROOZ

Year........ Month........ Day........ Subject:..................

$$\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ 0 & 2L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{PL^3}{EI} \\ -\frac{PL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

بالامثلثی شد راحت تر بدست می آید.

محاسبات داریم $\frac{n^3}{3}$ →

مثلاً ماتریس 10×10 ← تعداد گام ها $\frac{10^3}{3}$

اگر سمت پایین صفر شد راحت تر معادلات را می توانیم حل کنیم.

- از معادله آخر شروع می کنیم:

$$0q_3 + 2Lq_4 = -\frac{PL^3}{EI}$$

$$\rightarrow q_4 = -\frac{PL^2}{EI}$$

که شیب در انتهای تیر است. $\tan\theta$

جابجایی آزاد تیر است سر گیردار.

حالا می ریم سراغ معادله بالایی:

$$12q_3 - 6L\left(-\frac{PL^2}{2EI}\right) = -\frac{PL^3}{EI}$$

$$12q_3 = \frac{PL^3}{EI}(-3-1) \rightarrow q_3 = -\frac{PL^3}{3EI}$$

این هم مقدار جابجایی در انتهای تیر سر گیردار

الان برای به دست آوردن عکس العمل ها از این ۲ معادله اول استفاده می کنیم.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

Year........ Month........ Day........ Subject:

حالا معادله‌ها را می‌نویسیم.

$$\frac{EI}{L^3}\left(12\times 0 + 6L\times 0 \;\middle|\; -12q_3 + 6Lq_4\right) = R_1$$

$$\frac{EI}{L^3}\left(0 + 0 \;\middle|\; -6Lq_3 + 2L^2q_4\right) = R_2$$

حالا مقدارهای q_3 و q_4 را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{EI}{L^3}\left\{-12\left(-\frac{PL^3}{3EI}\right) + 6L\left(\frac{-PL^2}{2EI}\right)\right\} = R_1$$

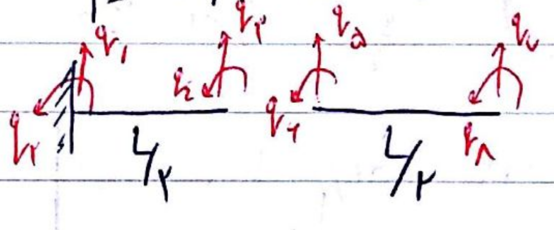
$$+4P - 3P = R_1 \longrightarrow R_1 = P$$

$$-6Lq_3 + 2L^2q_4 = R_2 \longrightarrow R_2 \checkmark$$

حالا این را با ۲ المان انجام می‌دهیم. باز ماتریس سختی همان است.

$$K_{beam} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

حالت کلی.



حالا بر حسب پارامترها ماتریس سختی را بازنویسی می‌کنیم.

برای المان اول (ها)

$$\frac{EI}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L/2 & -12 & 6L/2 \\ 6L/2 & 4(L/2)^2 & -6L/2 & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6L/2 & 12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2(L/2)^2 & -6L/2 & 4(L/2)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1=0 \\ q_2=0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

یا اینکه L را مساوی L/2 بگیریم.

آخر سر به جای L بگذاریم L/2.

این واسه المان اول

q_3 و q_4 ← معادل یابی ندارد

کار را راحت‌تر است.

Year. .... Month. .... Day. .... Subject: ....

خود المان = [گره‌ها] ها ؟

حالا می‌ریم سراغ المان دوم

$$\frac{EI}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L/2 & -12 & +6L/2 \\ 6L/2 & 4(L/2)^2 & -6L/2 & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6L/2 & +12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2(L/2)^2 & -6L/2 & 4(L/2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_5 = q_3 \\ q_6 = q_4 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix}$$

چون در شکل اصلی یک پارچه است اگر این گونه نباشد جسم پاره می‌شود یا می‌شکند.

$$\begin{cases} q_3 = q_5 \\ q_4 = q_6 \end{cases}$$

«شرط هم»

پس در شماره گذاری هم این گونه عمل می‌کنیم

$q_2\ q_1 \quad q_4\ q_3 \quad q_4\ q_3 \quad q_6\ q_5$

خب از ماتریس المان اول داریم:

و اینکه این ماتریس‌ها رو باید با هم جمع بزنیم دومی 4×4 است پس اولی رو هم 4×4 می‌کنم.

$$\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -6L/2 & 0 & 0 \\ -6L/2 & 4(L/2)^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نکته (اول اصلاحات را انجام می‌دیم)

حالا با دومی جمع می‌کنیم که ماتریس تبدیل شد به

$$\frac{EI}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L/2 \\ 0 & 8(L/2)^2 & -6L/2 & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6L/2 & 12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2(L/2)^2 & -6L/2 & 4(L/2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

این الان ماتریس سختی سیستم است.

Scanned by CamScanner

$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Year.......... Month.......... Day..........

نیروی اعمال شده خارجی در q_3 و q_4 ندارم.

نیروهای خارجی:

$$\frac{EI}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L/2 \\ 0 & 4(L/2)^2 & -6L/2 & 2(L/2)^2 \\ -12 & -6L/2 & 12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2(L/2)^2 & -6L/2 & 4L^2/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

نیروهای خارجی

ردیف اول را ×۸ می کنیم. $(1/2)^3$

$$\times\frac{L^3}{EI}\qquad \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 192 & 0 & -96 & 24L \\ 0 & 16L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{PL^3}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

طرفین $\times\frac{L^3}{EI}$

حالا ساده سازی کنیم. از ۴ فاکتور بگیریم که اعداد کوچکتر بشوند و EI/L را در نظر بگیریم.

$$\times\frac{1}{8}\qquad \begin{bmatrix} 48 & 0 & -24 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \\ -24 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}\{q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{PL^3}{4EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[illegible]

$$x\,-1/4\qquad \begin{bmatrix} 48 & 0 & -24 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 10/8 \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{PL^3}{4EI} \end{Bmatrix}$$

[illegible]

Year.......... Month.......... Day..........

Subject:..................

$$\begin{bmatrix} ۴۸ & ۰ & -۲۴ & ۶ \\ ۰ & ۴ & -۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & +۴ & -۳/۲ \\ ۰ & ۰ & -۳/۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -\frac{PL^۳}{۳EI} \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

حالا انو صفر کنم

$$\begin{bmatrix} ۴۸ & ۰ & -۲۴ & ۶ \\ ۰ & ۴ & -۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & +۳ & -۳/۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱/۴ \end{bmatrix} \{q\} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -\frac{PL^۳}{۳EI} \\ -\frac{PL^۳}{۸EI} \end{Bmatrix}$$

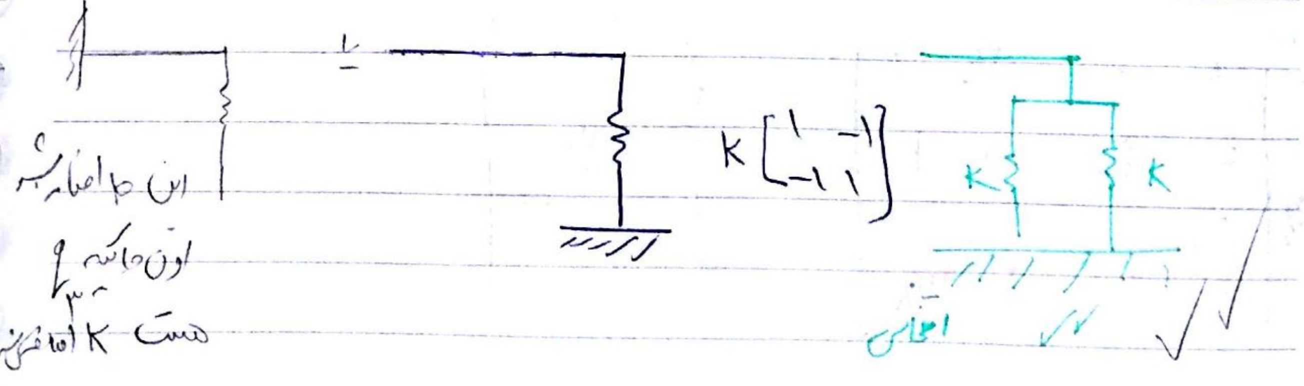
از آخری شروع می کنیم . به معادله نوشتن

$$\frac{1}{4} q_4 = \frac{-P}{۸EI} \longrightarrow q_۴ = -P/۲EI \qquad -\frac{PL^۳}{۲EI}$$

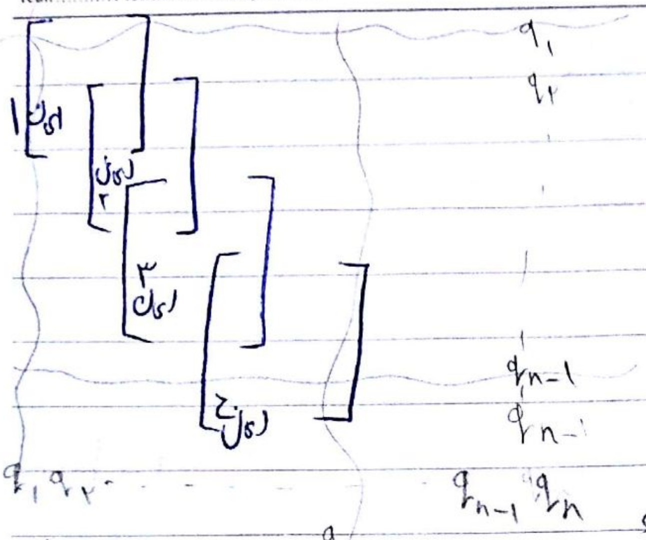
جواب اصلی ما

بوده if اما ← ✓✓

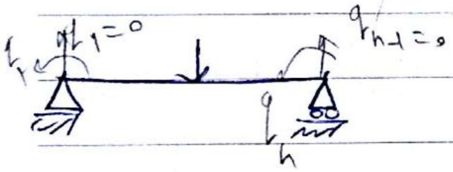
حالا برای مثال یه تغییری دهیم در صورت سوال .



حالت کلی برای اضافه شدن المان



درجه آزادی = ۰ ردیف و ستون مربوطش = ۰

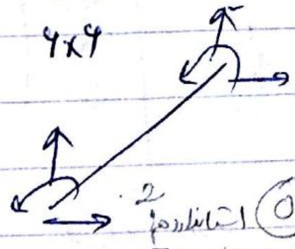


سه ماتریس سختی // برای عکس العمل از ردیف های حذف شده استفاده می کنیم.

ماتریس درجات آزادی.

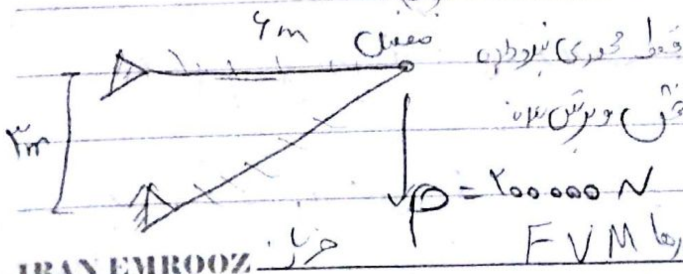
توی خانه یک تیر که از وسط تیر دار است حل کنید. بعد فنر اضافه کنید. بعد از SAP استفاده کنید.

کاربرد المان تیر با خرپا است بعد می خواهیم دوران بگیریم. در این جا در هر گره ۳ درجه آزادی داریم.



نشان نیم جهت است. ⑤ استانداردها
ISO / DIN

جلسه ۹۷/۲/۱۵



موضوع پروژه:

① المان‌ها ② المان های تیر FVM خرپا

(جدول وزن) St

عضو عمرانی سطح مقطع وارد مرحله تسلیم نشه. ضریب اطمینان. گزارش

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

Year.......... Month.......... Day..........   Subject:..................

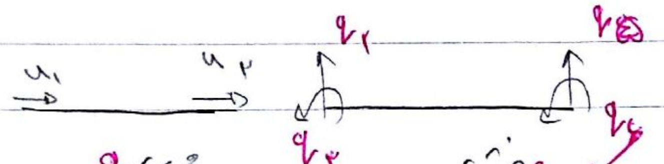
قطر و ضخامتی که وارد موجه تسلیم بشه . مقطع دایره ای توخالی : تنش تسلیم فولاد معمولی

۲ تغییر جهت افزایش ظرفیت . تکیه گاه ثابت اضافه کنیم . باز باید حرکت کند . می‌شه جوش زد
تکیه گاه هم می‌شه اضافه کرد

۵ + ۲ ⟶ تکلیف

۲ مثال حل می کنیم:

تیر در صفحه در وضعیت افقی :



ترکیب ۲ المان

محوری (q_1, q_4):

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} q_1 \\ q_4 \end{matrix}$$

خمش (q_2, q_3, q_5, q_6):

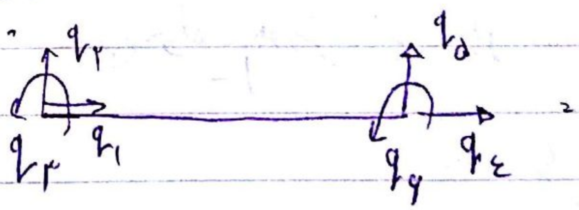
$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{متقارن (sym)} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{matrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{matrix}$$

| استوار ۳×۳ ... امتحان

$$\begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & & & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}\begin{matrix} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

sym



$$= \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

اول می‌ریم ردیف q_1 ستون q_1 را پر می‌کنیم باشیم.

بعد می‌ریم سراغ عدد ۱۲ که می‌شه ردیف و ستون q_2

بعد ردیف q_6 ستون q_5

بعد می‌ره سراغ $6L$ به صورت ... حل می‌کنه.

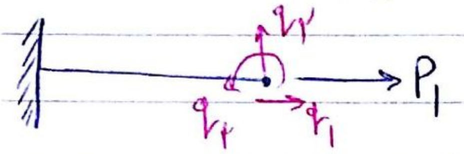
به صورت متقارن پرش می‌کنه

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

درجات آزادی $q_1 \; q_2 \; q_3$ را حذف نکنیم سه تا معادله تبدیل می‌شود به

با اجزا محدود جابجایی و عکس العمل هارو به دست بیار که همه شرایط رو دارد (I)



این مثال سوالات اولش جواب آخر رو میدیم ۵۱۲

$$\frac{2}{L}\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

چون بار محوری است.

حذف کاهش

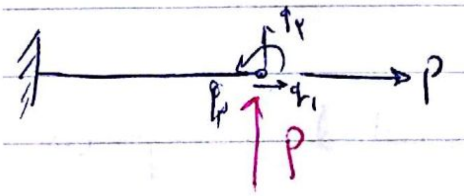
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} q_1 = P \rightarrow q_1 = \frac{PL}{EA} = u_1$$

$$q_2 = 0$$

$$q_3 = 0$$

حالا مسئله را تغییر میدهیم



$$\frac{2}{L}\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Year....... Month....... Day....... Subject:.......

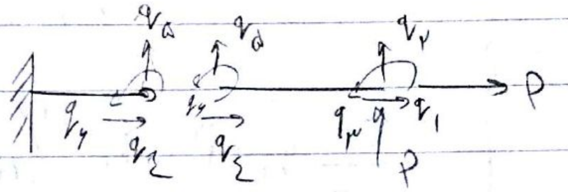
ماتریس کاهش یافته

$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 2EI/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

$$EA/L \; q_1 = P \rightarrow q_1 = PL/EI = u_1$$

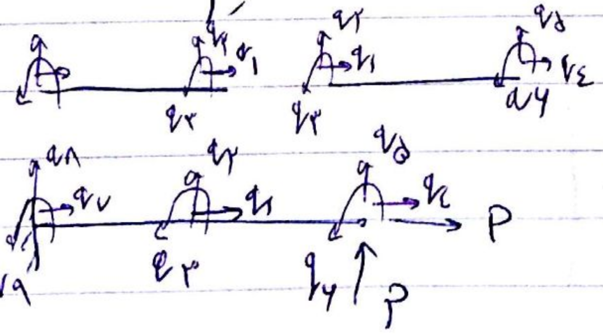
$$q_3 = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\frac{12EI}{L^3} q_2 - \frac{6EI}{L^2}\left(PL^2/2EI\right) = P \rightarrow q_2 = \frac{4P}{12EI/L^3} = \frac{1}{3} PL^3/EI$$



$$\frac{EI}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} EA/(L/2) & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/(L/2)^3 & -6EI/2(L/2) \\ 0 & 6EI/(L/2)^2 & 4EA/(L/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

الان بیایم مثال قبل را با ۲ المان حل می‌کنیم و طول هر المان را L می‌گیریم



4×4 6×6 $[6\times6]$ 4×4

IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

Year.......... Month.......... Day.......... تا حوزه (ارزش) صحت Subject:

که ۶ تای سر بالا صفرند:

$$\{F\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

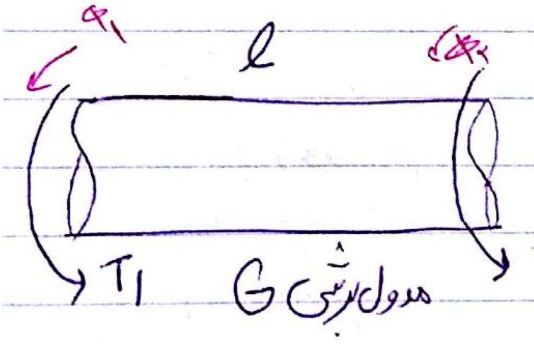
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

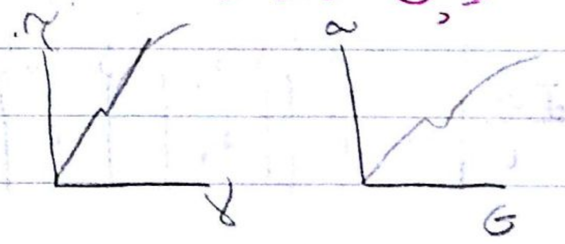
جلسه ۲۴، ۲، ۹۷

$0/256E-04$

10^{-4}

اساس پیچش، و بار گسترده





$3G = E$

$$\Delta\phi = \frac{TL}{JG}$$ تغییر در فاصله پیچش

J دایره : $\frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi c^4}{2}$ (d: قطر، c: شعاع)

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{TL}{JG}$$

IRAN EMROOZ

Year....... Month....... Day.......

Subject:.......

$$T = \frac{JG}{L}(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\frac{JG}{L}(\phi_2 - \phi_1) = T_1 \quad \text{درست جپ}$$

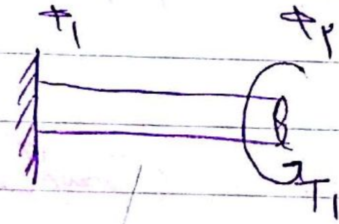
به صورت ماتریسی بنویسیم (چپ و راست):

$$\frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی ابیچش

فنری $k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ محوری $\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

شروع می کنیم به مسائل حل کردن. ابتدا با یک المان:



عکس العمل

$$\frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{Bmatrix}$$

$\phi_1 = 0$ پس ستون اول شو حذف می کنیم
ردیف رو هم حذف می کنیم هر وقت عکس العمل خواستم ازش استفاده می کنم:

$$\frac{JG}{L}\phi_2 = T_1 \rightarrow \phi_2 = \frac{T_1 L}{JG} \longrightarrow \text{همان جواب مقاومت مصالح}$$

اگر یک T وسط داشته باشد یا نابیوستگی داشته باشیم با ۱ المان حل نمی شود مجبوریم سراغ ۲ المان

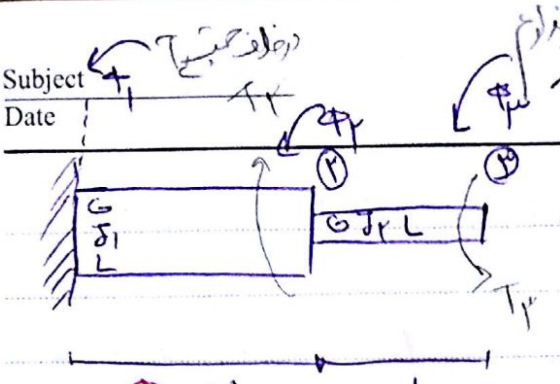
IRAN EMROOZ

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حداقل ۲ المان

در کجا ناپیوستگی در سطح مقطع یا در محل باری که ...



حتماً + φ با قانون دست راست

$$\frac{GJ_1}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\phi_1, \phi_2) \qquad \frac{GJ_2}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\phi_2, \phi_3)$$

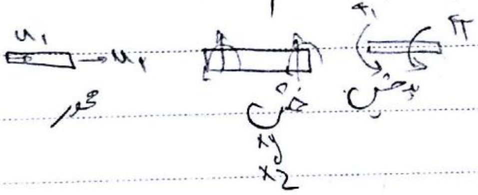
حالا ۲ تا رو با هم جمع می‌زنیم که ماتریس سفتی به دست بیاد.

$$\begin{bmatrix} \frac{J_1G}{L} & -\frac{J_1G}{L} & \\ -\frac{J_1G}{L} & \frac{J_1G}{L}+\frac{J_2G}{L} & -\frac{J_2G}{L} \\ & -\frac{J_2G}{L} & \frac{J_2G}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ -T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

عکس العمل

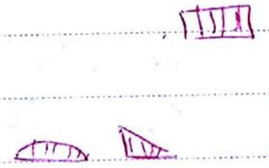
اول با حل معادله ۲ مجهولی ϕ_2 و ϕ_3 به دست میاد

بعد عکس العمل را خواستیم می‌ریم سراغ معادله (I)



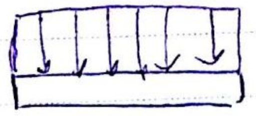
برای ۳ بعدی در هر گره ۶ درجه آزادی ۱۲×۱۲

در صفحه ۶×۶ می‌شه.

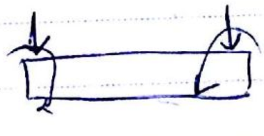


حالا می‌ریم سراغ بار گسترده — یکنواخت / غیریکنواخت

$w(x) = w$

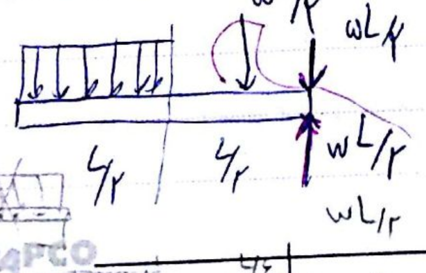


می‌خوایم این ۲ سیستم معادل هم باشند

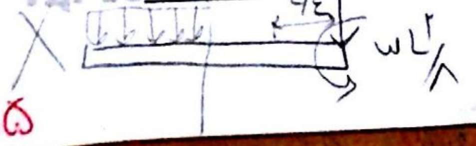


بعد از قاعده ۱/۲ از انتهای اعمال می‌شه محل نیرو.

خب اول بیایم نصف می‌کنیم



خب حالا یه کوپل می‌ذاریم که تبدیل می‌شه به بعدی



Subject (قرارداد)

Date

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}=q(x)$$

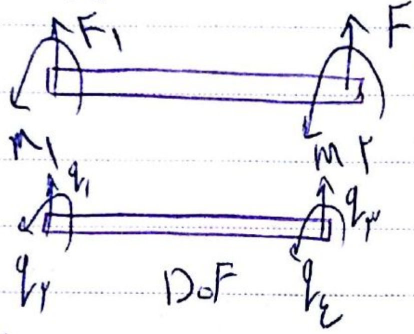
$-w(x)$ + درجات نول [illegible]

+ (قرارداد) $F.d$ نه می‌ریم سراغ روش انرژی کار انجام شده برابر است با

توسط بار گسترده کار:

$$W=\int_0^l q(x)\,V(x)\,dx = q_1F_1+q_2M_1+q_3F_2+q_4M_2$$

شیب درجه ۲

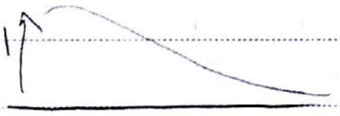


در المان محدود قرارداد + نیروها

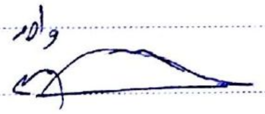
درجات آزادی

جابجایی

$$V(x)=q_1P_1(x)+q_2P_2(x)+q_3P_3(x)+q_4P_4(x)$$



$$P_1(x)=\frac{2x^3}{L^3}-\frac{3x^2}{L^2}+1$$



واحد

شیب واحد

$$P_2(x)=\frac{x^3}{L^2}-\frac{2x^2}{L}+x$$

جابجایی واحد در نقطه تحت اثر

واحد

$$P_3(x)=-\frac{2x^3}{L^3}+\frac{3x^2}{L^2}$$

$$P_4(x)=\frac{x^3}{l^2}-\frac{x^2}{l}$$

شیب واحد

توابع حالت‌های شکل در طول تیر

حالا $V(x)$ را می‌ذاریم در معادله $\int$

Subject
Date

المان ورتساوکی

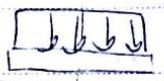
$$\int_0^L \left[q(x)\, q_1 P_1(x) + q(x)\, q_2 P_2(x) + q(x)\, q_3 P_3(x) + q(x)\, q_4 P_4(x)\right] dx =$$ سمت راست معادله قبل

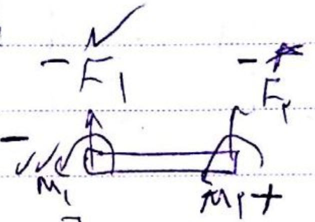
$q_1 F_1$

حالا جمله ها باید در طرفین مساوی شه

$$\int_0^L q(x)\, q_1 P(x)\, dx = q_1 F_1 \qquad (q(x) = -w)$$

هر جمله ای در دو طرف ok مستقل است.





$$\int_0^L -w\left(\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1\right) dx = F_1$$

$$-w\left[\frac{2x^4}{4L^3} - \frac{3x^3}{3L^2} + x\right]_0^L = -w\left[\frac{L^4}{2L^3} - \frac{L^3}{L^2} + L\right] = -\frac{wL}{2} = F_1$$

همون استاتیکی.

حالا بعدی $\quad -w\int_0^L \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x\right) dx = M_1$

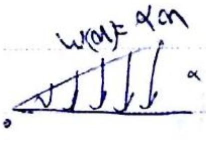
$$-w\left[\frac{x^4}{4L^2} - \frac{2x^3}{3L} + \frac{x^2}{2}\right]_0^L = -w\left[\frac{L^2}{4} - \frac{2L^2}{3} + \frac{L^2}{2}\right]$$

$$= -wL^2\left[\frac{3 - 2\times 4 + 6}{12}\right] = -\frac{wL^2}{12} = M_1$$

حالا بعدی $\quad -w\int_0^L \left(-\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}\right) dx = -w\left[\frac{-2x^4}{4L^3} + \frac{3x^3}{3L^2}\right]_0^L = -\frac{wL}{2}$

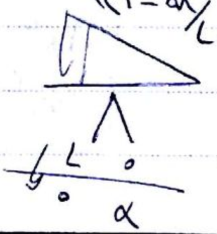
همون تیپ استاتیکی

بعدی $\quad -w\int_0^L \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) dx = -w\left[\frac{x^4}{4L^2} - \frac{x^3}{3L}\right]_0^L = -wL^2\left(\frac{3-4}{12}\right)$

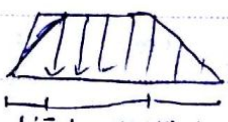


$w(x) = \alpha x$

بجای $q(x) = \alpha x$ میذاریم.



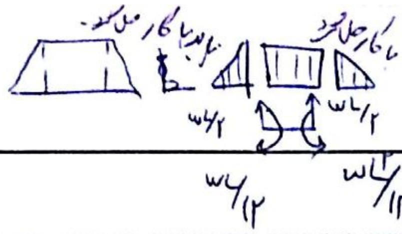
$\alpha(1 - x/L)$

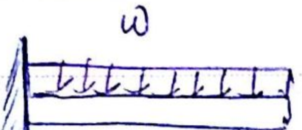


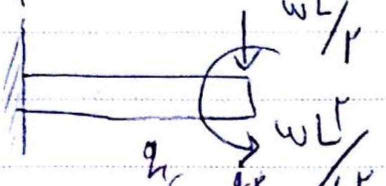
از ۳ المان استفاده میکنم.

PAPCO

Subject
Date







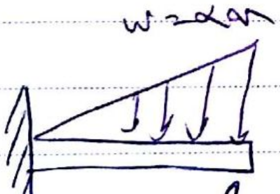
حالا ماتریس سختی عضو را می‌نویسیم.

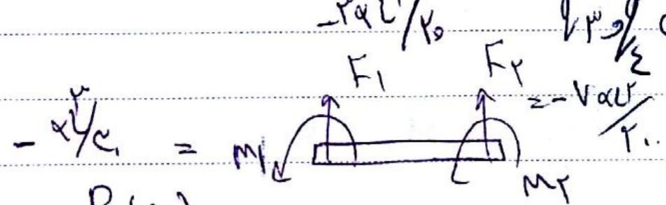
حتماً در بردار داشته باشیم.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ -wL/2 \\ +wL^2/12 \end{Bmatrix}$$

اینجا باید حل کرد برای q_3 و q_4

مثال دیگر





$$F_1 = -\alpha\int_0^l x\underbrace{\left(\frac{2x^3}{L^3}-\frac{3x^2}{L^2}+1\right)}_{P_1(x)}dx = \alpha\int_0^L\left(\frac{2x^4}{L^3}-\frac{3x^3}{L^2}+x\right)dx$$

$$= \alpha\left[\frac{2x^5}{5L^3}-\frac{3x^4}{4L^2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^L$$

$$= \alpha L^2\left(\frac{3}{20}\right)$$

$$M_1 = -\alpha\int_0^L x\underbrace{\left(\frac{x^3}{L^2}-\frac{2x^2}{L}+x\right)}_{P_2(x)}dx = -\alpha\left[\frac{x^5}{5L^2}-\frac{2x^4}{4L}+\frac{x^3}{3}\right]_0^l = -\alpha L^3/30$$

$$F_2 = -\alpha\int_0^L x\underbrace{\left(-\frac{2x^3}{l^3}+\frac{3x^2}{L^2}\right)}_{P_3(x)}dx = -\alpha\left[-\frac{2x^5}{5L^3}+\frac{3x^4}{4L^2}\right]_0^L = -\alpha L^2\,7/20$$

Scanned by CamScanner

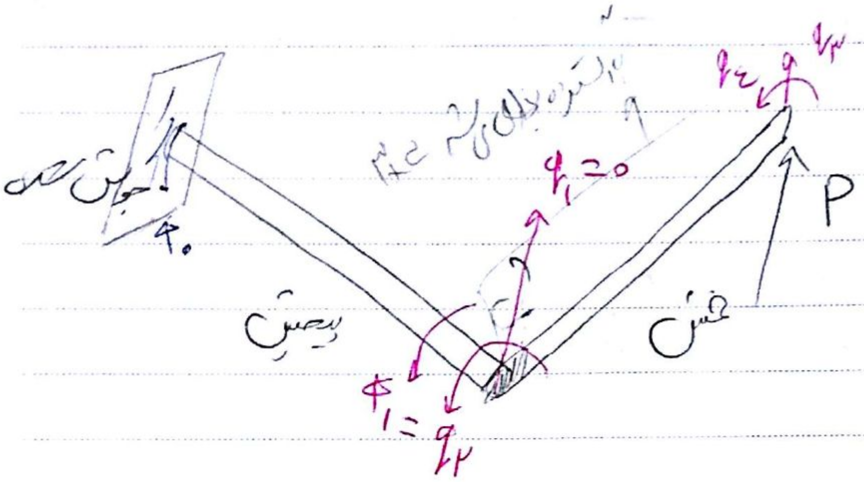
Subject: سری سومی

Date:

$$M_2 = -\alpha\int_0^L x\left(\frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}\right)dx = -\alpha\left[\frac{x^5}{5L^2}-\frac{x^4}{4L}\right]_0^L = \frac{\alpha L^3}{20}$$

مسأله ترکیبی:

۲ تا المان داریم



برای پیچشی: $J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi c^4}{2}$

$$\frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{matrix}$$

عضو خمشی A4 در

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix}$$

$\varphi_1 = q_2$ در اول ... باید ... حل

$K_{(y)}$

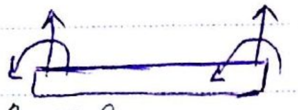
ماتریس سختی:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}+\frac{JG}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{sym (متقارن)} & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

۹۷/۲/۳۱

ترکیب خمش و محوری

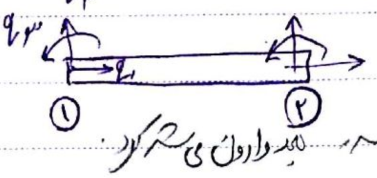


$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

خمشی (v_1 θ_1 v_2 θ_2)

محوری (u_1 u_2)

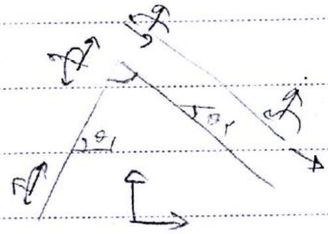
$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$$



استراتژی: ۳ ستون اول و ۳ ردیف حذف می‌شه، جدا وارد می‌شه کرد.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EA}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

u_1 v_1 θ_1 u_2 v_2 θ_2

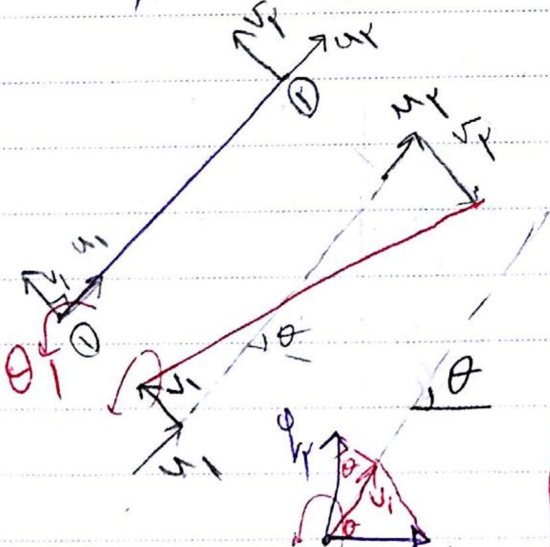


تبدیل دستگاه مختصات از محلی به کلی است

حالت کلی مثال بالا را حل می‌کنیم که ماتریس کلی به دست بیاریم تا بتونیم با هر θ ای حل کنیم.

اجازه می‌دیم عضومون جابه‌جا بشه.

محور عمود بر صفحه در دوران ها کلی است.



$u_1 = q_1 \cos\theta + q_2 \sin\theta$

$v_1 = -q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$ $\qquad \theta_1 = \theta_1$

$u_2 = q_4 \cos\theta + q_5 \sin\theta$

$v_2 = -q_4 \sin\theta + q_5 \cos\theta$

$\theta_2 = \theta_2$

محورهای اصلی ما

Year.......... Month.......... Day.......... Subject:..........

ماتریس برای عضو در صفحه چه خمش چه محور چه ترکیب

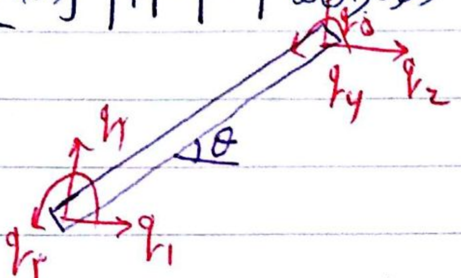
$[K]\{u\}=\{F\}$

ماتریس ها را به صورت ماتریس سختی می نویسیم.

$[K(\theta)]\{q\}=\{F\}$ — شیب دار که در راستای خود عضو و عمود بر آن ها

خب پس مسأله می شود به صورت رو به رو:

از معادله های کمکی تبدیل برای ماتریس استفاده می کنیم.



$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ & & & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

(columns: q_1 q_2 q_3 | q_4 q_5 q_6)

ماتریس تبدیل A

$[K]\{u\} = [k][R]\{q\}$

می خواهیم اینو بنویسیم.

فرقش با خرپا اینکه اون ۴x۴ بود این ۶x۶ است.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Scanned by CamScanner

Year...... Month...... Day...... Subject:......

حاصل ضرب ۲ ماتریس صفحه قبل:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos\theta & \frac{EA}{L}\sin\theta & 0 & -\frac{EA}{L}\cos\theta & -\frac{EA}{L}\sin\theta & 0 \\ -\frac{12EI\sin\theta}{L^3} & \frac{12EI\cos\theta}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI\sin\theta}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3}\cos\theta & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI\sin\theta}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI\sin\theta}{L^2} & -\frac{6EI\cos\theta}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L}\cos\theta & -\frac{EA}{L}\sin\theta & 0 & \frac{EA}{L}\cos\theta & \frac{EA}{L}\sin\theta & 0 \\ +\frac{12EI\sin\theta}{L^3} & -\frac{12EI\cos\theta}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI\sin\theta}{L^3} & \frac{12EI\cos\theta}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI\sin\theta}{L^2} & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} & +\frac{6EI\sin\theta}{L^2} & -\frac{6EA\cos\theta}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K][R]$$

که اگر در $\{q\}$ ضرب شود $\{f\}$ را می‌دهد

$[R]^T[K][R] = \{f\}$ $[R]^T$ خشی و در راستای محورهای عضو

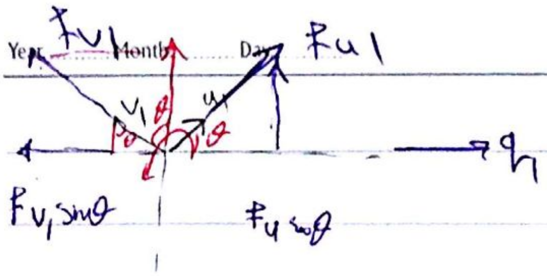
مشکل دو طرفی داده / در ترانهاده R ضرب می‌کنیم → اسکالر / بردار ۲ — به دست می‌آید

R^T جای درایه‌ها و ستون عوض می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [R]^T$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u_1} \\ f_{v_1} \\ M_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u_1}\cos\theta - f_{v_1}\sin\theta \\ f_{u_1}\sin\theta + f_{v_1}\cos\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_p \\ M_\theta \end{Bmatrix} \rightarrow$$ نیروهای راستای x و y

Scanned by CamScanner



قطری
$۶ \times ۶ - ۶ = ۳۰$

کامل | خمش و محوری دوبعد

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\theta & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\sin\theta\cos\theta & -\frac{6EI}{L^2}\sin\theta \\ & \frac{EA}{L}\sin^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & +\frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} -K_{11} & -K_{12} & K_{13} \\ -K_{12} & -K_{22} & K_{23} \\ -K_{13} & -K_{23} & \frac{2EI}{L} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} K_{11} & K_{12} & -K_{13} \\ & K_{22} & -K_{23} \\ & & K_{33} \end{matrix}$$

متقارن $K_{12} = K_{21}$

جلسه ۷/۳/۹۷ :

IRAN EMROOZ

۲۳ نفر

Scanned by CamScanner